Neue Gradnetzkombinationen.

Von *Oswald Winkel*, Leipzig.

(Mit 6 Abbildungen s. Tafel 24.)

Allgemeines über zylindrische Projektionen.

Es ist eine bekannte, unumstößliche Tatsache, daß Zonen von einer gewissen größeren Breite nur dann vorteilhaft abgebildet werden können, wenn nicht mehr auf eine die Kugel berührende, sondern auf eine sie schneidende Fläche projiziert wird. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich beim zylindrischen Entwurf zunächst die rechteckige Plattkarte, die leider zu stark in Mißkredit geraten ist. Streng genommen dürfen aber rechteckige Plattkarten nur für solche Zonen entwickelt werden, deren Grenzkreisabstände (η_1) im Hinblick auf den Grundkreis mäßig große sind. Der Kartograph, der oft sehr breite Zonen wiederzugeben hat, sieht nun mit Bedauern, wie sehr es ihm für solche Fälle an Rat von seiten der Mathematiker fehlt. Damit diesem unhaltbaren Zustande möglichst abgeholfen werde, habe ich drei geometrisch charakteristische Entwürfe aufgestellt, deren Eigenschaften hier skizziert werden sollen.

Spezialfälle: a) Die Abbildung von Zonen, deren Breite größer als $2 \cdot 20°$ ist.

Entwurf 1a:

Unechtzylindrische Abbildung einer Zone von 100° Länge und $2 \cdot 30°$ Breite,

$$n = \cos \eta_0 = \frac{\cos \eta_1}{\cos^2 \eta_1/2} \; ^{1)}$$

Bekanntlich wird bei echt zylindrischen Projektionen die Konvergenz der Hauptkreise aufgehoben, was oft eine starke Flächenänderung zur Folge hat. Dieser Übelstand macht sich besonders dann störend bemerkbar, wenn die abzubildende Zone mehr als $2 \cdot 20$ Großkreisgrade breit ist. Es unterliegt keinem Zweifel, daß die Konvergenz nur durch die Anwendung einer unechten Zylinderprojektion zuwege gebracht werden kann. In Peterm. Mitt. 1913. II ist von mir auf Taf. 46 eine rechteckige Plattkarte des Atlantischen Ozeans geboten worden, bei der die prozentuale Verdehnung der Grenzkreise ($\pm \eta_1$) gleich der prozentualen Verkürzung des Grundkreises (η) ist.

Man hat nämlich

$$n = \cos \eta_0 = \frac{\cos \eta_1}{\cos^2 \eta_1/2} \quad \text{sowie} \quad x = \operatorname{arc} \xi\, n \quad \text{und} \quad y = \operatorname{arc} \eta.$$

Bezeichnet man ferner den Kleinkreisbogen zwischen irgendeinem abzubildenden Punkt und dem mittleren Hauptkreis (das ist also die Abweitung) mit $\operatorname{arc} \xi \cos \eta$, so liefert der Mittelwert $\operatorname{arc} \xi \left(\frac{n + \cos \eta}{2}\right) = x$ im Verein mit $\operatorname{arc} \eta = y$ eine unechte Schnittzylinderprojektion, die für die Wiedergabe von Zonen, die mehr als $2 \cdot 20°$ breit sind, wertvoll ist. Die x, y sind also die Mittelwerte aus den x, y der Mercator-Sansonprojektion und einer rechteckigen Plattkarte, und ich pflege zu schreiben:

$$W = \frac{Pl\left(n = \frac{\cos \eta_1}{\cos^2 \eta_1/2}\right) + MS}{2}$$

Dieses Prinzip, das man nach meinen Ermittelungen gegebenenfalls noch für $2 \cdot 70°$ breite Zonen anwenden darf, liegt dem gestrichelten Netz auf Abb. 1 (Taf. 24) zugrunde, bei dem $n = \cos \eta_0 = \cos 21° \, 51' = 0{,}928 \, ..$ ist. Man hat auf dieser Abbildung ferner die rechteckige Plattkarte $n = \cos 21° \, 51'$ (siehe die ausgezogenen Linien) und die Außenkurven (punktierte Linien), die sich durch Auftragung der Abweitungen ergeben. Durch diese Darstellung ist das Wesen der Projektion sehr leicht zu erkennen. Es ergibt sich schließlich, daß auf eine Fläche projiziert wird, die sich jener der Kugel recht gut „anschmiegt".

Werte für die „relativen" Verzerrungen, nur gültig für die Punkte des mittleren Hauptkreisbildes:

$$n = \frac{\cos \eta_1}{\cos^2 \eta_1/2} = \cos 21° \, 51' = 0{,}928 \, ..$$

	a	b	S	2ω
Grenzkr. $\eta_1 = \pm 30°$	1,036	1,000	1,036	2° 1′
	(1,072)	(1,000)	(1,072)	(3° 58′)
Hauptkleinkr. $\eta_0 = \pm 21° 51'$	1,000	1,000	1,000	0° 0′
Grundkr. $\eta = \pm 0°$	1,000	0,964	0,964	2° 6′
	(1,000)	(0,928)	(0,928)	(4° 16′)

(Die Verzerrungen für die echt zylindrische Form sind in Klammern beigefügt.)

Merkmale des Entwurfes:

Die Flächen der von den Kleinkreisen begrenzten Streifen, die bei der rechteckigen Plattkarte eine übermäßige $\frac{\text{Vergrößerung}}{\text{Verkleinerung}}$ zeigen, werden um 50 v. H. weniger verändert, die absolute, totale Flächenverzerrung (es tritt eine Verkleinerung ein) ist demnach wesentlich verringert. Die Kleinkreisbilder sind gleich weit voneinander abstehende, parallele Gerade; dieses wichtige didaktische Element bleibt also erhalten. Die Konvergenz tritt in Erscheinung, wofür freilich die Rechtschnittigkeit der Netzlinien verschwindet, und es entsteht an ihrer Stelle die „mittlere Schnittwinkelschiefe" infolge der mittleren, nicht absoluten Konvergenz.

Exakte Längenmessungen sind nur noch auf sämtlichen Kleinkreisen leicht durchführbar, aber auf den Hauptkreisen, mit Ausnahme des mittleren, ist das nicht mehr so einfach.

Die Vorteile dieser Abbildungsform sind derartig in die Augen springend, daß es rechnerischer Untersuchungen beinahe gar nicht bedarf, um ihre Anwendung zu empfehlen.

Die Konstruktion des Netzes in normaler Lage ist höchst einfach: Man trägt auf dem mittleren Hauptkreis die wahren Längen für die $\operatorname{arc} \eta$ ab, legt durch diese Schnittpunkte die geradlinigen Kleinkreise (Parallelen) und zeichnet die Außenhauptkreise für die echte Schnittzylinderprojektion und für die Mercator-Sansonprojektion. Nun legt man die zwischen den äußeren Hauptkreisen beider Projektionen genau die Mitte einhaltende Kurve der unechten Schnittzylinderprojektion fest und teilt die Kleinkreise in die erforderlichen gleichgroßen Intervalle ein. Hierauf können die noch fehlenden Hauptkreisbilder gezogen werden, und

[1]) Der Ausdruck bezeichnet hier den Radius jener Kleinkreise, in denen die Kugel mit dem Halbmesser 1 vom Projektionszylinder geschnitten wird.

das Netz für die unechte Schnittzylinderprojektion ist fertig. Sehr viel umständlicher ist natürlich die Entwicklung der nichtnormalen Formen.

Es erscheint also die Vorführung eines Beispieles geboten, wird doch dabei auch der Beweis durch die Praxis erbracht, daß das eben geschilderte Abbildungsverfahren ganz ausgezeichnete Bilder liefern kann.

Karte von Afrika und Europa (s. Abb. II) in querachsiger, abstandstreuer [1]), unechter Schnittzylinderprojektion.

Das fragliche Zonenstück besitzt im allgemeinen eine Länge von $2 \cdot 50°$ und eine Breite von $2 \cdot 30°$. Die Verhältnisse, wie sie zum Verständnis der Theorie auf Abb. I niedergelegt wurden, kehren hier fast buchstäblich wieder, nur eben mit dem Unterschied, daß hier eine querachsige Stellung des Projektionszylinders angenommen werden muß. Der Grundkreis wird vom 20. östlich von Greenwich liegenden Meridiangrad gebildet. Dies ist die x-Achse. Auf ihr ist der Ausgangspunkt für die rechtwinkligen Koordinaten, d. i. C_1, in 10° N angenommen worden. Hier liegt also die y-Achse, und man hat die Hauptpunkte auf dem Äquator in 110° östlicher und in 70° westlicher Länge von Greenwich. Man bestimmt zunächst alle ξ an der Hand der Hammerschen Azimuttafel $\varphi_0 = 0°$ durch die Operation $90° - \alpha$ für den Fall, daß C_1 auf dem Äquator liegt. Da C_1 aber in 10° N angenommen werden muß, so sind alle ξ-Werte nördlich vom mittleren Hauptkreis um den Betrag von 10° zu vermindern, während die südlichen um den gleichen zu erhöhen sind. Die η findet man mit Hilfe der Hammerschen Tafel der sphärischen Abstände $\varphi_0 = 0°$ aus $90° - \delta$. Die Vorgänge werden am besten durch ein der Praxis entnommenes Beispiel verständlich.

Aufgabe: Suche x, y für den Netzpunkt von 60° N und 40° O ($\lambda = 20°$). Dabei soll deren Angabe in Großkreisminuten erfolgen)[2]. Man hat zunächst $n = \cos \eta_0 = \cos 21° 51' = 0{,}928\ldots$ (log = 0,9676430 — 1)

$$\xi = 90° - (\alpha + 10°) = 90° - (28° 28{,}9' + 10°) = 51° 31{,}1' = 3091{,}1'$$

$$\eta = 90° - \delta = 90° - 80° 9{,}2' = 9° 50{,}8' = 590{,}8'$$

$$x = \frac{\text{arc } \xi \, n + \text{arc } \xi \cos \eta}{2}$$

$$\begin{aligned}
\log \xi &= 3{,}4901131 \\
+ \log n &= 9{,}9676430 - 10 \\
&\ 3{,}4577561 \\
\log \xi &= 3{,}4901131 \\
+ \log \cos \eta &= 9{,}9935548 - 10 \\
&\ 3{,}4836679 \\
\text{arc } \xi \cos n &= 2869{,}2' \\
\text{arc } \xi \cos \eta &= 3045{,}6' \\
x &= 2869{,}2' \\
&\ \ + 3045{,}6' \\
&\ 5914{,}8'/2 = 2957{,}4'; \quad y = 590{,}8'
\end{aligned}$$

[1]) „Abstandstreue" Entwürfe pflege ich alle diejenigen echten und unechten Projektionen zu nennen, bei denen die Kleinkreisabstände längentreu abgebildet werden. Dies hat natürlich auch volle Berechtigung bei nicht normalen Entwürfen. — [2]) Ich gehe da auf eine Anregung Breusings ein, der als Nautiker begreiflicherweise gern die Seemeile seinen Netzarbeiten zugrunde legte.

Um dem geschilderten Abbildungsverfahren leichter Eingang in die Praxis zu verschaffen, füge ich bei die

Tabelle der rechtwinkligen Koordinaten x, y für die Schnittzylinderprojektion mittlerer Konvergenz von Afrika und Europa.

		$\lambda = 0°$	10°	20°	30°	40°
$\varphi = 60°$	x	2892′	2909′	2957′	3040′	3158′
	y	0	299	591	869	1125
50°	x	2314	2331	2384	2475	2608
	y	0	385	762	1125	1464
40°	x	1735	1752	1804	1894	2029
	y	0	459	911	1351	1770
30°	x	1157	1172	1219	1300	1425
	y	0	519	1034	1540	2030
20°	x	578	591	629	695	798
	y	0	564	1125	1682	2230
10°	x	C_1 0	9	35	81	151
	y	0	591	1181	1770	2356
0°	x	578	574	560	537	508
	y	0	600	1200	1800	2400
—10°	x	1157	1157	1157	1161	1172
	y	0	591	1181	1770	2356
—20°	x	1735	1740	1754	1782	1833
	y	0	564	1125	1682	2230
—30°	x	2314	2322	2349	2398	2480
	y	0	519	1034	1540	2030
—40°	x	2892	2904	2940	3005	3108
	y	0	459	911	1351	1770

Das Messen von Längen und Flächen.

Zur Gewinnung der Kleinkreismaßstäbe ist zu bemerken: m sei eine wahre Länge; $\overline{m}$, die $\frac{\text{vergrößerte}}{\text{verkleinerte}}$, erhält man für irgendeinen Kleinkreis aus $\overline{m} = m \,.\, k$, wobei k das Verhältnis $\frac{\text{Kartenparallel } \eta}{\text{Kugelparallel } \eta}$ bedeutet und durch $\frac{\cos \eta_0 + \cos \eta}{2} : \cos \eta$ gegeben ist.

Beispiel: η sei $= 10°$; $m = 4000$ km, 4000 km in 1 : 85 000 000 = 47,059 mm

$$\begin{aligned}
\cos \eta_0 &= 0{,}928203 \\
+ \cos \eta &= 0{,}984810 \\
\frac{\cos \eta_0 + \cos \eta}{2} &= 1{,}913013/2 = 0{,}956506 \\
\log \frac{\cos \eta_0 + \cos \eta}{2} &= 0{,}9806877-1 \\
- \log \cos \eta &= 0{,}9933515-1 \\
\log k &= 0{,}9873362-1 \\
\log m &= 1{,}6726427 \\
+ \log k &= 0{,}9873362-1 \\
\log \overline{m} &= 1{,}6599789 \\
\overline{m} &= 45{,}71 \text{ mm}
\end{aligned}$$

Bei der unechten Schnittzylinderprojektion lassen sich genaue Längenmessungen, wie bereits gesagt, in der Richtung der Hauptkreisbilder nicht mehr in einfacher Weise vornehmen. Dennoch läßt sich das sehr erstrebenswerte Ziel erreichen, wenn man ein „Kilometernetz" herstellt [1]).

[1]) Siehe Abb. III.

Auf Plänen, die man zwecks leichterer Auffindung der beschriebenen, in einer Liste zusammengestellten Objekte gern mit einer Quadratur versieht, verfährt man nicht selten so, daß jede Quadratseite einem bestimmten (metrischen) Maße entspricht, wodurch sich Distanzschätzungen schon ohne Zuhilfenahme des Maßstabes oft genügend genau vornehmen lassen. Diese Idee liegt meinem Kilometernetz zugrunde, nur ist sie, weil hier sphärische Elemente in Frage kommen, nicht mehr ganz so leicht auszuführen.

Man beginnt bei der Entwicklung des Kilometernetzes zunächst mit der Auftragung der arc η = 1000 km, 2000 km usw. auf dem mittleren Hauptkreis, bestimmt für die arc η die ang η, zieht die Kleinkreise, trägt auf jedem derselben nach den Gesetzen der Projektion gleichfalls die Kilometereinteilung ab und zieht die Netzmaschen vollends aus. Die Übertragung dieses Netzes auf Pauspapier gestattet dann beim Auflegen auf die Karte genaue Längenmessungen nicht bloß in der Richtung der im Sinne der Projektion wichtigen Kleinkreise, sondern auch in der Richtung derjenigen Kleinkreise, die zu den eben erwähnten auf der Kugel senkrecht verlaufen.

Entwurf 2a [1]).

Unechtzylindrische Abbildung einer Zone von 100° Länge und 2 · 30° Breite,

$$n = \frac{1 + \cos \eta_1}{2}$$

Der Entwurf 2a unterscheidet sich vom Entwurf 1a nur durch die andere Wahl von n. Die relativen Verzerrungen, deren Mitteilung für das mittlere Hauptkreisbild genügen soll, sehen so aus:

$$n = \cos \eta_0 = \frac{1 + \cos \eta_1}{2} = \cos 21° 5' = 0{,}933\,..$$

	a	b	S	2ω
Grenzkr. $\eta_1 = \pm 30°$	1,041	1,000	1,041	2° 18′
Hauptkleinkr. $\eta_0 = \pm 21° 5'$	1,000	1,000	1,000	0° 0′
Grundkr. $\eta = \pm 0°$	1,000	0,967	0,967	1°57′

Es ergibt sich, daß bei diesem Vorgehen (es ist der mittlere Kugelkleinkreis als Hauptkleinkreis angenommen) die Verzerrungen der äquatorialen Zone günstiger werden, und zwar auf Kosten der polaren. Dabei wird aber noch die Totalflächenverzerrung geringer als bei der Form 1a!

$n = \frac{1 + \cos \eta_1}{2}$ möchte ich förmlich bezeichnen als „goldenen Schnitt für die Sphäre".

Entwurf 3a [1]).

Unechtzylindrische Abbildung einer Zone von 100° Länge und 2 · 30° Breite,

$$n = \frac{\sin \eta_1}{\operatorname{arc} \eta_1}$$

Werte für die „relativen" Verzerrungen, nur gültig für die Punkte des mittleren Hauptkreisbildes

$$n = \cos 17° 16' = 0{,}955\,..$$

	a	b	S	2ω
Grenzkr. $\eta_1 = \pm 30°$	1,051	1,000	1,051	2° 52′
Hauptkleinkr. $\eta_0 = \pm 17° 16'$	1,000	1,000	1,000	0° 0′
Grundkr. $\eta = \pm 0°$	1,000	0,977	0,977	1° 18′

[1]) Graphisch nicht dargestellt.

Die Bildfläche ist gleich der Fläche des Originals, u zwar trifft es nicht bloß im Hinblick auf die Gesamtflä zu, sondern auch in bezug auf die von den Hauptkr bildern begrenzten Streifen. Die äquatorialen Gegend werden noch günstiger abgebildet als bei 1a und 2a, natü lich nur zum weiteren Schaden der polaren Gebiete. B merkenswert ist dabei, daß die Hauptkleinkreise imm noch außerhalb der Zone $\pm \frac{\eta_1}{2}$ liegen. Es fragt si welche von den drei durch die geometrische Eigenart n harakterisierten Formen die bessere sei.

Meiner Ansicht nach ist der Vorzug im „allgemeine der Projektionsform 1a zu geben, die wohl die meis Vorzüge auf sich vereinigt. Wollte man sie aber zur Wied gabe der „ganzen" Kugeloberfläche anwenden, so erg sich, daß ihr die „Form 2a" wegen der weniger stark Totalflächenverkleinerung überlegen ist.

b) Die Abbildung der „ganzen" Erdkugeloberfläche

Entwürfe 1b [1]), 2b [1]), 3b.

Bei 1b, wo $\eta_1 = 90°$ ist, verschwindet die rechteck Plattkarte, die Totalflächenverkleinerung (absolute Fläch verkleinerung) wird zu stark, denn beide Hemisphä würden in einer einzigen zur Wiedergabe gelangen, wo sich allerdings eine absolute Konvergenz einstellt. Grenze für die Verwendbarkeit der Form 1a habe bereits die 2 · 70° breite Zone bezeichnet. Die Grenzf $n = \frac{1 + \cos \eta_1}{2}$ ist 2b. n ist hier = cos 60° = 0,5, Äquator macht also bei der unechten Form ³/₄, die linie ¹/₄ der Basis eines Berührungszylinders aus.

Die Form 3b $\left(n = \frac{\sin \eta_1}{\operatorname{arc} \eta_1}\right)$ ist 3a, auf die „gan Kugelfläche ausgedehnt (s. Abb. IV). Rückt man äußeren Hauptkreise so weit nach außen, daß der Gru kreis abweitungstreu erscheint, dann ist das Verhä $\frac{\text{Pollinie}}{\text{Äquator}}$ von derselben Art wie bei der Eckertschen W projektion V.

Eckerts Projektion V ist demnach eine unechte B rührungszylinderprojektion!

Weil die Kugeloberfläche als eine 2 · 90° breite aufgefaßt werden muß und breite Zonen nur dann der Projektion ein dem Kugelbild weit ähnlicheres Ka bild liefern, wenn auf eine die Kugel schneide Fläche projiziert wird [1]), so ist ohne weiteres klar, die von M. Eckert aufgestellten Wulstprojektionen Wiedergabe sogenannter Planisphären nicht in dem M geeignet erscheinen, wie es in Peterm. Mitt. 1906, S versichert wird. Die Bezeichnung „Wulstprojekt (Polarogkoide) [2]) ist zu vermeiden, da es sich um n anderes als unechte Berührungszylinderprojektionen han

Um das wahre Gesicht speziell der Projektion V erkennen, war der Gang meiner Betrachtungen folge

R sei der Kugelradius. r der Wulst ist g R . 0,882 026, $\frac{r}{R}$ folglich 1 : 1,133 754 und R = r . 1,13

[1]) Siehe die Einleitung. — [2]) Eine Polarogkoide besitzen wir üb schon in Mollweides abweitungsgleicher, flächentreuer Berührungszylin jektion mit absoluter Konvergenz!

ehmen wir η zu 30° an und legen das Maßstabverhält-: 250 000 000 zugrunde, so ist r = 22,475 mm. Man demnach für Eckerts Projektion V $x = r + (r \cdot \cos \eta)$ 6,8775 mm, das ist die Länge von arc 180° auf $\eta = 30°$. plizierl man dieses x mit 1,133 754, so ergibt sich **74,69 mm.** Zu demselben Werte gelangt man aber, n man einfach das Mittel bildet aus x der quadratischen tkarte und x der Mercator-Sansonprojektion [1]:

x für quadr. Pl. = 80,05 mm
+ x für Merc.-Sans. = 69,33 mm
149,38 mm/2 = **74,69 mm**

Hieraus folgt, daß Eckerts V, sofern Äquator und elmeridian längentreu gezeichnet werden, genau chen der quadratischen Plattkarte und der Mercator-sonprojektion liegt. Da aber hierbei eine Vergrößerung Gesamtfläche erfolgen würde, so hat Eckert das Zuviel Fläche einfach durch Herabsetzung des Reduktions-hältnisses zum Verschwinden gebracht.

Dieses Verfahren, bei dem also das „natürliche" Maßverhältnis verlassen wird, ist selbstverständlich korrekt, n es gibt keinen anderen Weg, um für unechte Be-ungszylinderprojektionen dieser Art die absolute chentreue erzielen zu können. Dabei ist dringend zu schen, daß künftig bei der Herstellung von Karten gilt auch für Mollweides abweitungsgleiche Berührungs-nderprojektion) das Maßstabverhältnis richtig ange-en werde, für das im Grunde genommen allein der Erd-elradius bestimmend ist [2]).

Die Eckertschen Abbildungen mit der halben Pol-e leiden naturgemäß an einer zu starken Vernachlässi-g der Verzerrungen polarer Gebiete. Auch hieraus ibt sich, daß der „günstigste Hilfskörper" [3]) für kartenprojektionen die halbe Wulst nicht sein kann. l aber für Eckerts Projektion VI dieselben Verhält-e gelten, nur eine Veränderung der Parallelkreis-tände stattfindet, um die „absolute" Flächentreue zu ielen, so kann ich diese Form gleichfalls als die end-tige Lösung eines Problems nicht anerkennen. Für unechte, flächentreue Schnittzylinderpro-tion liegt es am nächsten, $n = \frac{\sin \eta_1}{\text{arc}\, \eta_1}$ beizubehal-n, jedoch müssen dann noch die Abstände der Klein-isbilder so eingerichtet werden, daß auch die Streifen, sich in der Richtung der Kleinkreise erstrecken, an che jenen des Originals gleich bleiben.

Nicht unerwähnt darf bleiben, daß sich meine Pro-tionen auch bei der Wahl von $n = \frac{\cos \eta_1}{\cos^2 \eta_1/2}$ und $\frac{1 + \cos \eta_1}{2}$ so zeichnen lassen, daß Totalflächentreue ahrt wird. R der Kugel wird dann zu $\widehat{R}$ vergrößert, an Stelle der Abstandstreue tritt die Abstands-eichheit. Die Form der Netzfiguren erleidet dabei ürlich keinerlei Veränderung, dagegen wird die Be-hnung schwieriger. Trotz der größeren Totalflächen-kleinerung, besonders bei den abstandstreuen Planisphären, erscheint mir aber das Festhalten an der Abstandstreue wegen der damit verbundenen Längentreue im mittleren Hauptkreisbild und den zwei Kleinkreisbildern empfehlenswerter. Die Kombination der rechteckigen Plattkarte mit der abstandstreuen Berührungszylinderprojektion à la Mollweide = W_1 führt zu $\frac{\text{Pl}\,(n<1) + W_1}{2}$ (s. Abb. V). Zwar ist die Schiefschnittigkeit verbessert, aber es werden die polaren Teile zu stark verdehnt. Man hat bei W_1 für den Fundamentalkreis $\widehat{R}$ = arc 90°, η wird zu $\bar{\eta}$, und es ist $x = \text{arc}\,\xi \cdot \cos \bar{\eta} \cdot v$, worin $v = \frac{\cos \bar{\eta}}{\cos \eta}$. Mithin haben wir für $\frac{\text{Pl}\,(n<1) + W_1}{2}$ $x = \frac{\text{arc}\,\xi\,(n + \cos \eta \cdot v)}{2}$ und $y = \text{arc}\,\eta$.

Wichtiger noch als $\frac{\text{Pl}\,(n<1) + \text{MS}}{2}$ und $\frac{\text{Pl}\,(n<1) + W_1}{2}$ ist jedoch die Kombination der rechteckigen Plattkarte mit Aïtoffs abstandstreuer Planisphäre, d. i. $\frac{\text{Pl}\,(n<1) + A}{2}$.

Für Aïtoffs azimutatische Projektion fand ich $x = 2\,\text{arc}\,\delta \cdot \sin \alpha$ von $\triangle\, \lambda/_2$, $y = \text{arc}\,\delta \cdot \cos \alpha$ von $\triangle\, \lambda/_2$, das heißt: die δ und α sind mit $\lambda/_2$ zu berechnen, wenn die x, y für die Länge λ gelten sollen. Infolgedessen ist für die „Tripelprojektion" $\frac{\text{Pl}\,(n<1) + A}{2}$

$$x = \frac{\text{arc}\,\xi\, n + 2\,\text{arc}\,\delta \cdot \sin \alpha \text{ von } \triangle\, \lambda/_2}{2},$$

$$y = \frac{\text{arc}\,\eta + \text{arc}\,\delta \cdot \cos \alpha \text{ von } \triangle\, \lambda/_2}{2}.$$

Diese letztere Projektion (s. Abb. VI) ist am wichtigsten, sie ist nahezu totalflächentreu, hat gegenüber $\frac{\text{Pl}\,(n<1) + \text{MS}}{2}$ eine verbesserte Schiefschnittigkeit, führt die polaren Verdehnungen von $\frac{\text{Pl}\,(n<1) + W_1}{2}$ auf das richtige Maß zurück und merzt somit die Schwächen ihrer Vorläufer aus.

Zu den relativen Verzerrungen sei nur kurz bemerkt, daß ich diese für die Kritik der Entwürfe wichtigen Elemente der überaus freundlichen Hilfsbereitschaft des Herrn Prof. Dr. Arthur Krause (Leipzig) zu danken habe. Die Punkte ohne jegliche Verzerrung sind auf den Abbildungen besonders durch × hervorgehoben worden.

Zusammenstellung der Hauptergebnisse.

1. Es werden zum ersten Male unechte Schnittzylinderprojektionen entwickelt und dabei die Wahl von n begründet.

2. Durch Beobachtung der geometrischen Eigenart von n ist es möglich geworden, für abstandstreue Zylinderprojektionen diejenigen Breiten zu bestimmen, innerhalb deren die Veränderung von n ohne größere Gefahr für die Verzerrungen geschehen kann; es werden also Fehlgriffe beim Aufsuchen der wichtigen Konstante n künftig leicht zu vermeiden sein.

3. Zwecks Ausführbarkeit von Längen- und eventuell auch von Flächenmessungen wird ein Kilometernetz in Vorschlag gebracht.

[1]) Daher auch $x = \frac{\text{arc}\,\xi + \text{arc}\,\xi \cos \eta}{1{,}764}$; $y = \frac{\text{arc}\,\eta}{0{,}882}$ für Eckerts Kreis-projektion (V). — [2]) Z. d. Ges. f. Erdk. Berlin 1914, S. 51: Der Karten-tab. — [3]) Peterm. Mitt. 1906, S. 102: Neue Entwürfe für Erdkarten.

4. Es wird gezeigt, daß die *unechten* Schnittzylinderprojektionen die echten verdrängen werden, wenn die Zonenbreite 2 · 20° überschreitet, und daß dann die Konvergenz der Hauptkreise eine entschiedene Berücksichtigung zu erfahren hat.

5. Die Rechtschnittigkeit der Netzlinien ist aufzugeben, und es erscheint nunmehr auch bei *Schnitt*zylinderprojektionen die „*mittlere Konvergenz*“ als neuer Faktor zur zweckmäßigen Gestaltung der Gradnetze und damit eine „mittlere Totalflächenverzerrung“, wodurch es gelingt, die absoluten Flächenverzerrungen, wie sie die echten Formen erzeugen, um 50 v. H. herabzudrücken.

6. Sofern die absolute Konvergenz nicht gewahrt zu werden braucht, d. i. bei der Abbildung von Zonen von weniger als 2 · 90° Breite, gelingt die treuere Wiedergabe der Kugeloberfläche durch Kombination der rechteckigen Plattkarte (bei vorsichtig gewähltem n) mit Aïtoffs Projektion.

Prof. Hermann Wagner schreibt in der 4. Auflage seines Lehrbuches der Geographie (I, S. 197): „*In der Herstellung eines möglichst getreuen Abbildes der Erdoberfläche und ihrer Teile gipfelt die gesamte mathematische Geographie.*“ Wie schon aus dem Inhalt der Einleitung ersichtlich, ist die Aufgabe, sehr breite Zonen möglichst wenig verzerrt abzubilden, höchst wichtig, weil ihr große praktische Bedeutung innewohnt. Sie war merkwürdigerweise bisher ungelöst geblieben. Für den Fall, daß die Form einer solchen Zone den zylindrischen Entwurf verlangt, liegt nunmehr eine befriedigende Lösung vor. Sie ist in dem „*arithmetischen Mittel*“ der x, y gefunden worden, das sich bilden läßt, wenn ganz bestimmte, echte *Schnitt*zylinderprojektionen mit den Planisphären kombiniert werden.

Es ist naheliegend, die Abbildungsprinzipien, wie ich sie hier für zylindrische Entwürfe dargelegt habe, nunmehr auch für solche Kugelzonen in Anwendung zu bringen, für welche in erster Linie *konische* Projektionen einzutreten haben. Die Vorbedingungen, auch dieser Aufgabe gerecht werden zu können, sind jetzt gegeben, so daß in der Tat die möglichst getreue Abbildung beliebig großer Teilstücke der Erdoberfläche erreichbar ist und somit eine Lücke in der Kartenprojektionslehre ausgefüllt wird. Meine Projektionen haben mithin, im Rahmen der Systematik betrachtet, auch als eine neue Klasse von Entwurfsarten zu gelten.

Neben Prof. M. Eckert ist übrigens, wie ich nachträglich bemerke, auch Hofrat M. Nell bei der Suche nach zweckmäßigen Projektionen bereits auf der richtigen Fährte gewesen[1]).

Die Kunst in der Gradnetzprojektion besteht darin, die unvermeidlichen Verzerrungen derart über die Karte *zu verteilen*, daß ein dem Kugelbild möglichst ähnliches Kartenbild entsteht. In diesem Sinne bieten die von mir gegebenen Anhalte die geeignete Handhabe.

1) Peterm. Mitt. 1890, S. 93 ff., und Hammers Kommentar, ebenda 1900, S. 42 ff.